

TP7 – Stéréophotométrie

Les n niveaux de gris de l'image $\mathbf{q} = [x, y]^\top$ d'un point \mathbf{Q} situé à la surface d'une scène 3D, supposée opaque et lambertienne, éclairée successivement par n éclairages parallèles et uniformes \mathbf{s}_k , s'écrivent :

$$I_k(x, y) = \mathbf{s}_k^\top \mathbf{m}(x, y), \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

où $\mathbf{m}(x, y) = \rho(x, y) \mathbf{n}(x, y)$ est le produit de l'albédo $\rho(x, y)$ de \mathbf{Q} par sa normale unitaire sortante $\mathbf{n}(x, y)$. Comme le niveau de gris ne peut pas être négatif dans l'ombre propre, là où l'angle entre \mathbf{s}_k et $\mathbf{m}(x, y)$ est supérieur à $\pi/2$, le système (1) doit être remplacé par :

$$I_k(x, y) = \max \{ \mathbf{s}_k^\top \mathbf{m}(x, y), 0 \}, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

Exercice 1 : résolution classique de la stéréophotométrie

La figure 1 montre $n = 3$ images d'un vase d'albédo uniforme $\rho \equiv 1$, simulées à l'aide de la loi (2).

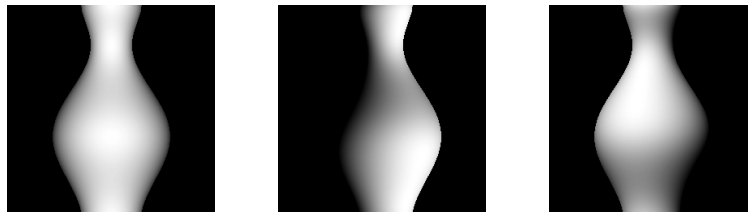


FIGURE 1 – Exemple de $n = 3$ images de synthèse d'un vase d'albédo uniforme $\rho \equiv 1$.

En un point $\mathbf{q} = [x, y]^\top$, l'estimation du vecteur $\mathbf{m}(x, y)$ à partir des n niveaux de gris $I_1(x, y), \dots, I_n(x, y)$ revient à inverser le modèle (2). Or, à cause de l'opérateur max, ce modèle n'est pas linéaire vis-à-vis de $\mathbf{m}(x, y)$. Commencer par négliger l'ombre propre revient à utiliser la loi de Lambert sous sa forme (1), dont nous savons par avance qu'elle est inexacte. L'estimation en moindres carrés de $\mathbf{m}(x, y)$ s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{m}}(x, y) = \underset{\mathbf{m}(x, y) \in \mathbb{R}^3}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{S} \mathbf{m}(x, y) - \mathbf{i}(x, y)\|^2 \quad (3)$$

où $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n]^\top$ est une matrice $n \times 3$ construite par concaténation des n vecteurs d'éclairage, et où $\mathbf{i}(x, y) = [I_1(x, y), \dots, I_n(x, y)]^\top$ est le vecteur des n niveaux de gris en (x, y) . La solution de (3) s'écrit :

$$\hat{\mathbf{m}}(x, y) = (\mathbf{S}^\top \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^\top \mathbf{i}(x, y) \quad (4)$$

Cette expression n'a de sens que si la matrice $\mathbf{S}^\top \mathbf{S}$ est inversible, c'est-à-dire si \mathbf{S} est de rang 3.

Écrivez la fonction `estimation`, appelée par le script `exercice_1`, qui calcule $\hat{\mathbf{m}}(x, y)$ en tout point de l'image du vase, et en déduit les estimations $\hat{\rho}(x, y)$ et $\hat{\mathbf{n}}(x, y)$ de l'albédo et de la normale. Attention : il est indispensable de calculer la solution (4) simultanément en tous les points de l'image, ce qui veut dire que l'utilisation d'une boucle `for` est proscrite. Les paramètres de sortie de la fonction `estimation` doivent avoir les dimensions suivantes pour le jeu de données `vase` : 256×256 pour `rho_estime`, 3×65536 pour `N_estime`.

Parmi les jeux de données `vase`, `vase_brillant`, `vase_brillant_bis` et `visage`, les trois premiers sont synthétiques. Cela vous permet d'évaluer *quantitativement* le résultat par l'écart angulaire moyen entre les normales estimées et les normales réelles. Quant au quatrième jeu de données, qui provient de la base d'images de visages de l'Université de Yale, son évaluation ne peut être que *qualitative*.

Comme on pouvait s'y attendre, les résultats ne sont pas satisfaisants là où la loi de Lambert (1) est mise en défaut. Pour le jeu de données `vase`, l'ombre propre se traduit par une mauvaise estimation de $\mathbf{m}(x, y)$ sur les bords gauche et droit. Pour `vase_brillant`, ce sont les taches brillantes qui biaisent l'estimation.

Exercice 2 : prise en compte des écarts au modèle lambertien

Pour tenir compte des écarts à la loi de Lambert, on peut soit recourir à une méthode d'estimation robuste, soit forcer les données à vérifier cette loi en supprimant l'ombre propre, l'ombre portée et les taches brillantes. Le rang de la matrice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, où n désigne le nombre d'images et p le nombre de pixels, devrait être au plus égal à 3, puisque :

$$\mathbf{I} = \mathbf{S}\mathbf{M} \quad (5)$$

où $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ et $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times p}$. Or, avec des données réelles, qui présentent inévitablement des écarts à la loi de Lambert, le rang de \mathbf{I} est généralement égal à $\min(n, p)$, qui est strictement supérieur à 3.

Une façon de corriger les écarts à la loi de Lambert consiste à remplacer \mathbf{I} par la matrice $\bar{\mathbf{I}}$ de rang 3 la plus proche de \mathbf{I} , au sens de la *norme de Frobenius* :

$$\|\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{I}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\bar{I}_{i,j} - I_{i,j})^2} \quad (6)$$

Si la décomposition SVD de \mathbf{I} s'écrit comme suit :

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (7)$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$, et en supposant les valeurs singulières rangées par ordre décroissant sur la diagonale de $\mathbf{\Sigma}$, alors, d'après le théorème d'Eckart-Young, la matrice $\bar{\mathbf{I}}$ cherchée s'écrit :

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{\Sigma}}\bar{\mathbf{V}}^T \quad (8)$$

où $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, $\bar{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\bar{\mathbf{V}}^T \in \mathbb{R}^{3 \times p}$ sont les sous-matrices respectives de \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$ et \mathbf{V}^T obtenues en conservant les lignes/colonnes de plus faibles indices.

Écrivez la fonction `correction`, appelée par le script `exercice_2`, qui corrige les images de stéréophotométrie selon cette technique. Testez les jeux de données `vase_brillant_bis` et `visage` (cette méthode est inopérante sur les jeux de données ne comportant que $n = 3$ images, comme `vase` ou `vase_brillant`) :

- Pour `vase_brillant_bis`, les taches spéculaires semblent avoir été gommées.
- Pour `visage`, ce sont plutôt les ombres qui semblent avoir disparu.

Dans les deux cas, affichez la valeur minimale de $\bar{\mathbf{I}}$: comment se fait-il que cette valeur soit négative ?

Attention – Le calcul direct de `svd(I)` étant très gourmand, il est conseillé d'utiliser la fonction `svds` de Matlab.

Stéréophotométrie non calibrée

Dorénavant, nous désignons par \mathbf{I} la matrice des niveaux de gris corrigés $\bar{\mathbf{I}}$, telle qu'elle a été calculée dans l'exercice 2. La factorisation SVD de cette matrice avec réduction du rang fournit une solution au problème de la *stéréophotométrie non calibrée*. En effet, d'après (8), le couple de matrices $(\mathbf{S}_0, \mathbf{M}_0) = (\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}, \bar{\mathbf{\Sigma}}^{1/2}\bar{\mathbf{V}}^T)$ constitue une *solution exacte* de l'équation $\mathbf{S}\mathbf{M} = \bar{\mathbf{I}}$, c'est-à-dire une *solution approchée* de l'équation $\mathbf{S}\mathbf{M} = \mathbf{I}$. Néanmoins, tous les couples de matrices $(\mathbf{S}_0\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}\mathbf{M}_0)$, où $\mathbf{A} \in \text{GL}(3)$, constituent d'autres solutions.

Pour qu'un couple (\mathbf{S}, \mathbf{M}) puisse réellement constituer une solution au problème non calibré, il faut que les normales obtenues à partir du champ \mathbf{M} soient *intégrables*. Cela élimine la plupart des solutions candidates, mais il existe encore une infinité de solutions intégrables (\mathbf{S}, \mathbf{M}) , qui se déduisent d'une solution intégrable particulière $(\mathbf{S}_1, \mathbf{M}_1)$ par les transformations suivantes (ambiguïté résiduelle dite « de bas-relief ») :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1\mathbf{G}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \mathbf{G}\mathbf{M}_1 \quad (9)$$

où la matrice \mathbf{G} , qui dépend de trois paramètres réels $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, s'écrit :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \iff \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha/\gamma \\ 0 & 1 & -\beta/\gamma \\ 0 & 0 & 1/\gamma \end{bmatrix} \quad (10)$$

Exercice 3 : résolution de l'ambiguïté de bas-relief

La fonction `impose_integrabilite`, qui vous est fournie, vous permet d'obtenir une solution intégrable particulière \mathbf{M}_1 par projection de \mathbf{M}_0 sur l'espace des solutions intégrables. Comment résoudre l'*ambiguïté de bas-relief*, c'est-à-dire comment trouver la « bonne » solution parmi l'infinité de solutions intégrables correspondant aux expressions (9) ?

Cela est impossible sans connaissance a priori sur la scène 3D. Or, dans le cas d'un visage, il semble raisonnable de supposer l'albédo de la scène « presque uniforme ». Nous pouvons donc rechercher, parmi les solutions (9), celle qui minimise la variance de l'albédo. Il semble également raisonnable de supposer que la normale est, en moyenne, parallèle à l'axe optique. Or, de (9) et (10), nous tirons les expressions suivantes de \mathbf{M}_x et \mathbf{M}_y :

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_{1,x} + \alpha \mathbf{M}_{1,z} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_y = \mathbf{M}_{1,y} + \beta \mathbf{M}_{1,z} \quad (11)$$

Si l'albédo est supposé uniforme, les moyennes $\langle \mathbf{M}_x \rangle$ et de $\langle \mathbf{M}_y \rangle$ sont proportionnelles à $\langle \mathbf{N}_x \rangle$ et à $\langle \mathbf{N}_y \rangle$. Par conséquent, dès lors que $\langle \mathbf{N}_x \rangle = \langle \mathbf{N}_y \rangle = 0$, nous déduisons de (11) les estimations suivantes de α et β :

$$\hat{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{M}_{1,x} \rangle}{\langle \mathbf{M}_{1,z} \rangle} \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{M}_{1,y} \rangle}{\langle \mathbf{M}_{1,z} \rangle} \quad (12)$$

Écrivez la fonction `estimation_non_calibree`, appelée par le script `exercice_3`, qui résout le problème de la stéréophotométrie non calibrée en tirant aléatoirement différentes valeurs du paramètre γ dans l'intervalle $]0, 1[$, et conserve celle qui minimise la variance de l'albédo. Testez ce script sur les jeux de données `vase_brillant_bis`, `visage` puis `Buddha`.

Remarques importantes :

- Les résultats sont incorrects si l'on ne prend pas garde à calculer la variance de l'albédo et les moyennes dans (12) **uniquement sur les pixels situés à l'intérieur du domaine de reconstruction**.
- Afin de comparer des choses comparables, il est nécessaire de normaliser l'albédo entre 0 et 1 avant de calculer sa variance.