Introduction aux communications numériques
Etude des transmissions sur fréquence porteuse

Première année - Département Sciences du Numérique

2020-2021

1 Introduction

Ce troisième travail va être dédié à l'étude de chaines de transmission sur fréquence porteuse.
Pour cela, vous allez devoir implanter sous Matlab les chaines passe-bas équivalentes associées à différentes chaines de transmission sur porteuse, afin de les analyser et de les comparer, à la fois en termes d'éfficaité spectrale et d'efficacité en puissance. De la même manière que pour le devoir précédent nous vous demanderons de répondre à un certain nombre de questions en plus de l'envoi de vos codes pour l'évaluation.

2 Définition de la chaine passe-bas équivalente à une chaine de transmission sur fréquence porteuse

Afin de réduire les temps de simulation et de réutiliser les calculs réalisés en bande de base, on définit une chaine passe-bas équivalente associée à la chaine de transmission sur fréquence porteuse à étudier. Dans un contexte de canal AWGN, la figure 1 rappelle le schéma d'une chaine de transmission sur fréquence porteuse, tandis que la figure 2 rappelle celui de la chaine passe-bas équivalente associée.

Pour passer de l'une à l'autre, on définit un signal complexe basse fréquence :

$$x_e(t) = I(t) + jQ(t),$$

équivalent au signal modulé sur porteuse transmis :

$$x(t) = Re\left[x_e(t)e^{j2\pi f_p t}\right],\ f_p \text{ étant la fréquence porteuse.}$$

$x_e(t)$ est appelé enveloppe complexe associée à $x(t)$. Elle possède une densité spectrale de puissance qui est égale à quatre fois la partie positive de la densité spectrale de puissance de $S_x(f)$ ramenée autour de la fréquence 0 :

$$S_{x_e}(f) = 4S_x\left(f + f_p\right)U\left(f + f_p\right),\ U(f) \text{représentant la fonction échelon unité.}$$

On a aussi :

$$S_x(f) = \frac{1}{4}\left\{S_{x_e}\left(f - f_p\right) + S_{x_e}\left(f + f_p\right)\right\}$$

De la même manière, on associe un bruit complexe basse fréquence équivalent au bruit, $n(t)$, introduit par le canal de propagation et filtré sur la bande du signal modulé :

$$n_e(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$$

avec

$$S_{n_e}(f) = 4S_n\left(f + f_p\right)U\left(f + f_p\right) = 4\frac{N_0}{2} = 2N_0,\ \text{autour de la fréquence 0}$$

Il viendra s'ajouter sur la bande F_e (fréquence d'échantillonnage), avec une même puissance sur chaque voie

$$\sigma_{n_I}^2 = \sigma_{n_Q}^2 = N_0 F_e$$

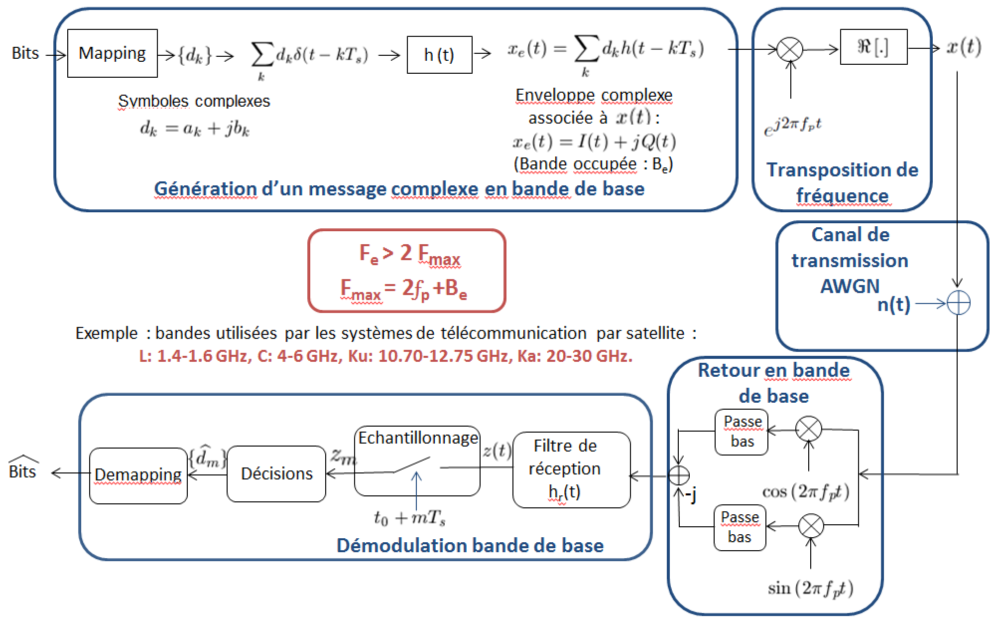

Figure 1: Chaîne de transmission sur porteuse

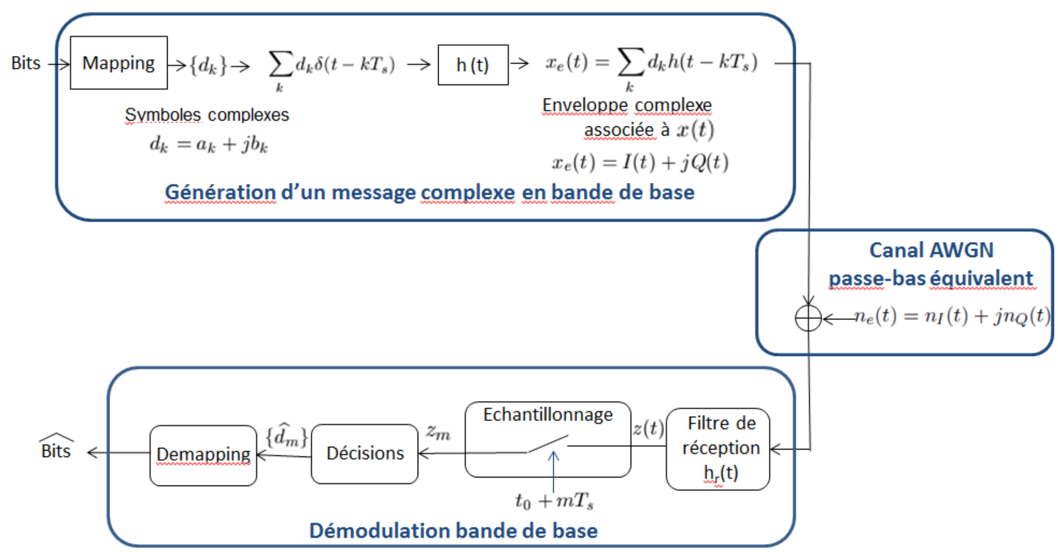

Figure 2: Chaîne de transmission passe-bas équivalente

3 Utilisation de la chaine passe-bas équivalente pour le calcul et l'estimation du taux d'erreur binaire

L'objectif de cette partie est de montrer que le taux d'erreur binaire obtenu pour une transmission est identique que l'on implante la chaine de transmission sur fréquence porteuse ou bien la chaine passe-bas équivalente. L'étude sera réalisée pour une transmission QPSK.

3.1 Implantation de la chaine sur fréquence porteuse

On implantera, dans un premier temps, la chaine de transmission QPSK sur fréquence porteuse, avec :

- un débit binaire $R_b = 2$ kbps et une fréquence d'échantillonnage $F_e = 10$ kHz,
- un mapping de Gray avec des symboles à moyenne nulle,
- un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé de roll off $\alpha = 0.35$,
- une fréquence porteuse $f_p = 2$ kHz,
- un canal de transmission qui ajoute un bruit blanc (densité spectrale de puissance $\frac{N_0}{2}\ \forall f$) et gaussien au signal en sortie du modulateur. Ce bruit sera ici réel et généré sur la bande F_e, grâce à la fonction randn de matlab, avec plusieurs puissances différentes, notées σ_n^2, que l'on calculera, en fonction des rapports signal à bruit par bit souhaités à l'entrée du récepteur $\frac{E_b}{N_0}$, de la manière suivante (voir démonstration en annexe) :
$$\sigma_n^2 = \frac{P_x N_s}{2log_2(M)\frac{E_b}{N_0}},$$
où M représente l'ordre de la modulation, N_s le facteur de suréchantillonnage et P_x la puissance du signal émis.
- un filtre de réception, dimensionné à partir du filtre d'émission (pas de filtre canal), afin de permettre à la chaine de respecter le critère de Nyquist et le critère de filtrage adapté,
- un échantillonnage optimal,
- un détecteur à seuil avec seuil optimaux pour prendre les décisions sur les symboles,
- un demapping adapté au mapping utilisé.

A partir de la chaine implantée :

1. Tracer les signaux générés sur les voies en phase et en quadrature ainsi que le signal transmis sur fréquence porteuse.
2. Estimer et tracer la densité spectrale de puissance du signal modulé sur fréquence porteuse.
3. Implanter la chaine complète sans bruit afin de vérifier que le TEB obtenu est bien nul.
4. Rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 8 dB.
5. Comparer le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaine de transmission.

3.2 Implantation de la chaine passe-bas équivalente

On implantera, dans un deuxième temps, la chaine de transmission passe-bas équivalente à la chaine de transmission sur fréquence porteuse réalisée précédemment.
Le bruit, introduit par le canal passe-bas équivalent au canal de propagation, est cette fois un bruit complexe $n_e(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$. Il viendra s'ajouter sur la bande F_e avec une même puissance sur chaque voie ($\sigma_{n_I}^2 = \sigma_{n_Q}^2 = N_0 F_e$), puissance que l'on calculera en fonction des rapports signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur E_b/N_0 souhaités de la manière suivante (démonstration en annexe) :

$$\sigma_{n_I}^2 = \sigma_{n_Q}^2 = \frac{P_{x_e} N_s}{2log_2(M)\frac{E_b}{N_0}},$$

où M représente l'ordre de la modulation, N_s le facteur de suréchantillonnage et P_{x_e} la puissance de l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse.

A partir de la chaine implantée :

1. Tracer les signaux générés sur les voies en phase et en quadrature.
2. Estimer puis tracer la densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur fréquence porteuse.
3. Implanter la chaine complète sans bruit afin de vérifier que le TEB obtenu est bien nul.
4. Rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 8 dB.
5. Tracer les constellations en sortie du mapping et en sortie de l'échantillonneur pour une valeur donnée de E_b/N_0.
6. Vérifier que l'on obtient bien le même TEB que celui obtenu avec la chaine simulée sur fréquence porteuse.

4 Comparaison de modulations sur fréquence porteuse

On considère les quatre chaines de transmission définies dans le tableau suivant ("SRRCF" signifie "Square Root Raised Cosine Filter" ou filtre en racine de cosinus surélevé en français) :

Modulation :	4-ASK	QPSK	8-PSK	16-QAM
Filtre d'emission :	SRRCF, $\alpha = 0,35$	SRRCF, $\alpha = 0,35$	SRRCF, $\alpha = 0,35$	SRRCF, $\alpha = 0,35$
Filtre de reception :	SRRCF, $\alpha = 0,35$	SRRCF, $\alpha = 0,35$	SRRCF, $\alpha = 0,35$	SRRCF, $\alpha = 0,35$
Debit binaire :	6 kbps	6 kbps	6 kbps	6 kbps
TEB :	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}

4.1 Etude de chaque chaine de transmission

Pour chaque chaine de transmission :

1. Implanter la chaine complète sans bruit, avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 12$ kHz, afin de vérifier que le TEB obtenu est bien nul. On pourra utiliser les fonctions Matlab *pskmod.m*, *pskdemod.m* et *qammod.m*, *qamdemod.m* pour réaliser les mapping/demapping et prises de décision.
2. Rajouter le bruit et :
   - Tracer les constellations en sortie du mapping et en sortie de l'échantillonneur pour différentes valeurs de E_b/N_0.
   - Tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 8 dB.
   - Comparer le TEB simulé au TEB théorique de la chaine étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaine de transmission.

4.2 Comparaison des chaines de transmission

1. En utilisant les tracés obtenus pour leurs TEBs, comparer et classer les différentes chaines de transmission en en termes d'efficacité en puissance.
2. Pour un même débit binaire, tracer les densités spectrales de puissance des signaux émis dans les différentes chaines de transmission étudiées afin de les comparer en termes d'efficacité spectrale et de les classer.

5 Annexes

5.1 Puissance de bruit à introduire dans les chaines de transmission

5.1.1 Chaine de transmission sur porteuse

On introduit un bruit réel de densité spectrale de puissance $N_0/2$ dans la bande F_e. La variance du bruit à introduire est donc donnée par :

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}F_e = \frac{E_s}{2\frac{E_s}{N_0}}F_e = \frac{P_x T_s}{2\frac{E_s}{N_0}}F_e, = \frac{P_x N_s}{2log_2(M)\frac{E_b}{N_0}},$$

où

- E_s représente l'énergie par symbole à l'entrée du récepteur : $E_s = \log_2(M)E_b$, si E_b représente l'énergie binaire à l'entrée du récepteur et M l'ordre de la modulation,
- T_s représente la durée symbole,
- N_s représente le facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, $T_e = 1/F_e$ étant la période d'échantillonnage
- P_x représente la puissance du signal émis.

5.1.2 Chaine de transmission passe-bas équivalente à la chaine de transmission sur fréquence porteuse

On ajoute, à l'enveloppe complexe $x_e(t)$ associée au signal modulé sur porteuse $x(t)$, un bruit complexe $n_e(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$ (voir figure 2). Il viendra s'ajouter sur la bande F_e avec une même puissance sur chaque voie ($\sigma_{n_I}^2 = \sigma_{n_Q}^2$), puissance que l'on calculera en fonction des rapports signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur E_b/N_0 souhaités de la manière suivante :

$$\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = N_0 F_e = \frac{E_s}{\frac{E_s}{N_0}}F_e = \frac{P_x T_s}{\frac{E_s}{N_0}}F_e = \frac{P_{x_e} T_s}{2\frac{E_s}{N_0}}F_e == \frac{P_{x_e} N_s}{2log_2(M)\frac{E_b}{N_0}},$$

où

- E_s représente l'énergie par symbole à l'entrée du récepteur : $E_s = \log_2(M)E_b$, si E_b représente l'énergie binaire à l'entrée du récepteur et M l'ordre de la modulation,
- T_s représente la durée symbole,
- N_s représente le facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, $T_e = 1/F_e$ étant la période d'échantillonnage
- P_{x_e} représente la puissance de l'enveloppe complexe associée au signal émis sur porteuse.

5.2 Précision sur les mesures de TEB

Le TEB peut être modélisé par une somme de variables aléatoires X_k prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ avec les probabilités $P[X_k = 0] = 1 - p$ (pas d'erreur) et $P[X_k = 1] = p$ (erreur) :

$$TEB = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k.$$

L'erreur quadratique relative sur le TEB est donnée par :

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_{TEB}^2}{m_{TEB}^2},$$

où m_{TEB} et σ_{TEB}^2 représentent, respectivement, la moyenne et la variance sur l'estimation du TEB.
La précision sur les mesures de TEB sera donnée par ϵ. On peut écrire :

$$m_{TEB} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E[X_k] = \frac{1}{N}N(1 \times p + 0 \times (1-p)) = p$$

et

$$\sigma_{TEB}^2 = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right)^2\right] - p^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} E[X_k X_i] - p^2$$

- si $k = i$ (N cas) alors $E\left[X_k^2\right] = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) = p$
- si $k \neq i$ ($N^2 - N$ cas) alors $E\left[X_k X_i\right] = E\left[X_k\right] E\left[X_i\right] = p^2$

D'où :

$$\sigma_{TEB}^2 = \frac{1}{N^2}\left\{Np + \left(N^2 - N\right)p^2\right\} - p^2 = \frac{p(1-p)}{N}$$

On constate que la variance de l'erreur tend vers 0 quand N augmente et on peut écrire l'erreur quadratique relative sur le TEB de la manière suivante :

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_{TEB}^2}{m_{TEB}^2} = \frac{1-p}{Np} \simeq \frac{1}{Np} \; pour \; p << 1$$

On obtient alors :

- le nombre d'élément binaire à générer, N, de manière à obtenir une précision ϵ fixée sur la mesure d'un TEB dont la valeur est, a priori, connue. Par exemple, si on veut mesurer un TEB de 10^{-2} avec une précision de 10%, il faudra générer $N = \frac{1}{10^{-2} \times (10^{-1})^2} = 10^4$ bits.
- le nombre de simulations à réaliser si la valeur à mesurer pour le TEB n'est pas, a priori, connue. On fera alors des simulations jusqu'à observer $1/\epsilon^2$ erreurs pour obtenir une mesure avec une précision ϵ fixée. Par exemple, si on veut mesurer le TEB avec une précision $\epsilon = 10\%$, il faudra compter les erreurs jusqu'à en obtenir $1/\epsilon^2 = 10^2$ avant de considérer la mesure de TEB obtenue comme disposant de la précision requise.