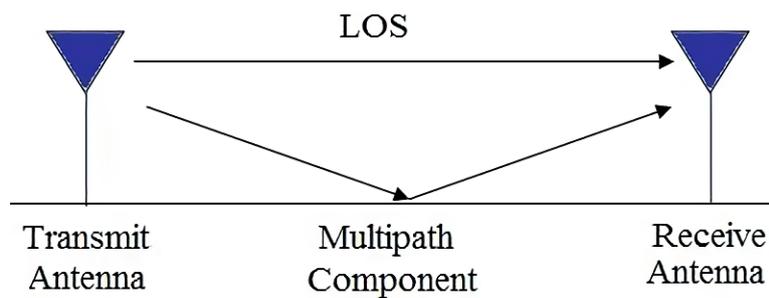


# Rapport de Projet

## Impact d'un canal de propagation sélectif en fréquence et introduction à l'égalisation



Groupe I  
Fainsin Laurent  
Heurtebise Tom

Département Sciences du Numérique  
Première année  
2020 — 2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et rappel du sujet</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Impact d'un canal de propagation multitrajets</b>	<b>4</b>
2.1	Etude théorique . . . . .	4
2.1.1	Écrire $y_e(t)$ en fonction de $x_e(t)$ et des paramètres du canal. . . . .	4
2.1.2	En déduire la réponse impulsionnelle $h_c(t)$ du canal passe-bas équivalent. . . . .	5
2.1.3	Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour $\tau_0 = 0$ , $\tau_1 = \tau_0 + T_s$ , $\alpha_0 = 1$ , $\alpha_1 = 0.5$ et bits = 1110010. . . . .	5
2.1.4	Tracer le diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ . Est-il possible de respecter le critère de Nyquist sur cette chaîne de transmission? . . . . .	6
2.1.5	En échantillonnant à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s$ et un détecteur à seuil à 0, calculer le TEB de la liaison en fonction de $T_s$ et $\sigma_w$ . . . . .	7
2.1.6	Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $\sigma_w^2$ en fonction de $N_0$ et de $T_s$ . . . . .	7
2.1.7	Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur ( $E_s$ ) en fonction de $T_s$ . . . . .	8
2.1.8	Déduire des questions précédentes l'expression du TEB en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ . . . . .	8
2.2	Implantation sous Matlab . . . . .	9
2.2.1	Implantez la chaîne de transmission sans canal et vérifiez que le TEB de la liaison est bien nul. . . . .	9
2.2.2	Implantez la chaîne de transmission avec la partie filtrage réalisée par le canal de propagation et vérifiez que vous retrouvez bien les résultats obtenus dans votre étude théorique. . . . .	10
2.2.3	Visualisez la constellation obtenue en réception. Est-elle conforme à ce que vous attendiez? . . . . .	11
2.2.4	Mesurez le TEB et expliquez la valeur obtenue. . . . .	11
2.2.5	Implantez la chaîne de transmission complète avec le filtrage canal et l'ajout de bruit. Tracez le TEB obtenu en fonction du rapport SNR à l'entrée du récepteur. . . . .	12
<b>3</b>	<b>Egalisation ZFE</b>	<b>13</b>
3.1	Etude théorique . . . . .	13
3.1.1	Déterminer les coefficients de l'égaliseur à implanter pour égaliser le canal multi-trajet considéré précédemment. . . . .	13
3.2	Implantation sous Matlab . . . . .	14
3.2.1	Déterminer par simulation les coefficients de l'égaliseur et les comparer à ceux trouvés précédemment. . . . .	14
3.2.2	Tracer la réponse en fréquence du canal de propagation, la réponse en fréquence de l'égaliseur, le produit des deux. Que peut-on conclure? . . . . .	14
3.2.3	Tracer la réponse impulsionnelle de la chaîne de transmission échantillonnée à $N_s$ avec et sans égalisation. Que peut-on conclure? Tracer de même les constellations obtenues avant et après égalisation. . . . .	15

3.2.4	Ajouter du bruit dans la chaîne de transmission, tracer le TEB obtenu avec égalisation . . . . .	16
-------	--	----

# 1 Introduction et rappel du sujet

Vous trouverez dans ce rapport les réponses aux questions posées par le sujet du projet 1 avec des figures venant appuyer nos propos. Le rapport se suffit à lui-même et ne nécessite aucun aller-retour entre le code matlab et ce dernier. Avant de vous présenter les résultats que nous avons obtenus nous vous proposons un bref rappel du sujet qui intègre des figures issues du sujet.

Le but de ce projet était d'étudier une chaîne de transmission présentant un canal sélectif en fréquence, c'est-à-dire un canal pour lequel la réponse en fréquence de module constant sur la bande du filtre de Nyquist du filtre d'émission et de réception est perturbée par le filtre du canal.

On retrouve ce type de situation dans le cadre de transmissions terrestres présentant de nombreux obstacles comme sur la figure ci-dessous :

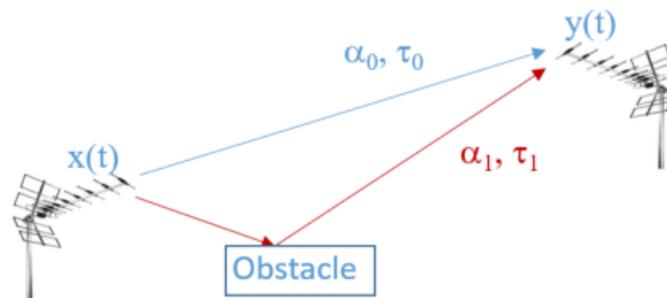


FIGURE 1 – Propagation multi-trajet

Ainsi sur la figure 1, on peut noter que tout se passe comme si le signal empruntait deux trajets différents de durée différente. La conséquence de ceci est l'apparition d'interférences dans le signal reçu. Ces dernières peuvent être atténuées par un processus que l'on nomme égalisation et que nous avons étudié dans la deuxième partie du projet.

## 2 Impact d'un canal de propagation multitrajets

### 2.1 Etude théorique

Dans cette section le sujet nous demandait de répondre à quelques questions théoriques sur le canal de propagation multitrajets.

#### 2.1.1 Écrire $y_e(t)$ en fonction de $x_e(t)$ et des paramètres du canal.

La présence d'un seul obstacle sur la figure 1 nous permet d'écrire  $y_e$  comme la somme du signal en ligne directe et celle du signal retardé et atténué par l'obstacle :

$$y_e(t) = \alpha_0 x_e(t - \tau_0) + \alpha_1 x_e(t - \tau_1)$$

**2.1.2 En déduire la réponse impulsionnelle  $h_c(t)$  du canal passe-bas équivalent.**

$$\begin{aligned}
 y_e(t) &= \alpha_0 \delta(t - \tau_0) * x_e(t) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1) * x_e(t) \\
 &= (\alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)) * x_e(t) \\
 &= h_c(t) * x_e(t) \\
 \implies h_c(t) &= \alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)
 \end{aligned}$$

**2.1.3 Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$  pour  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = \tau_0 + T_s$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.5$  et bits = 1110010.**

Afin de répondre à cette question, nous avons d'abord du déterminer l'expression de  $g(t)$ .

$$\begin{aligned}
 g(t) &= h(t) * h_c(t) * h_r(t) = h(t) * h_r(t) * h_c(t) \\
 &= \Pi_{T_s} \left( t - \frac{T_s}{2} \right) * \Pi_{T_s} \left( t - \frac{T_s}{2} \right) * (\alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)) \\
 &= T_s \Lambda_{T_s} \left( t - T_s \right) * (\alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)) \\
 &= \alpha_0 T_s \Lambda_{T_s} (t - T_s - \tau_0) + \alpha_1 T_s \Lambda_{T_s} (t - T_s - \tau_1) \\
 &= T_s \Lambda_{T_s} (t - T_s) + \frac{T_s}{2} \Lambda_{T_s} (t - 2T_s)
 \end{aligned}$$

En traçant  $g(t)$  sur MATLAB on obtient la figure suivante :

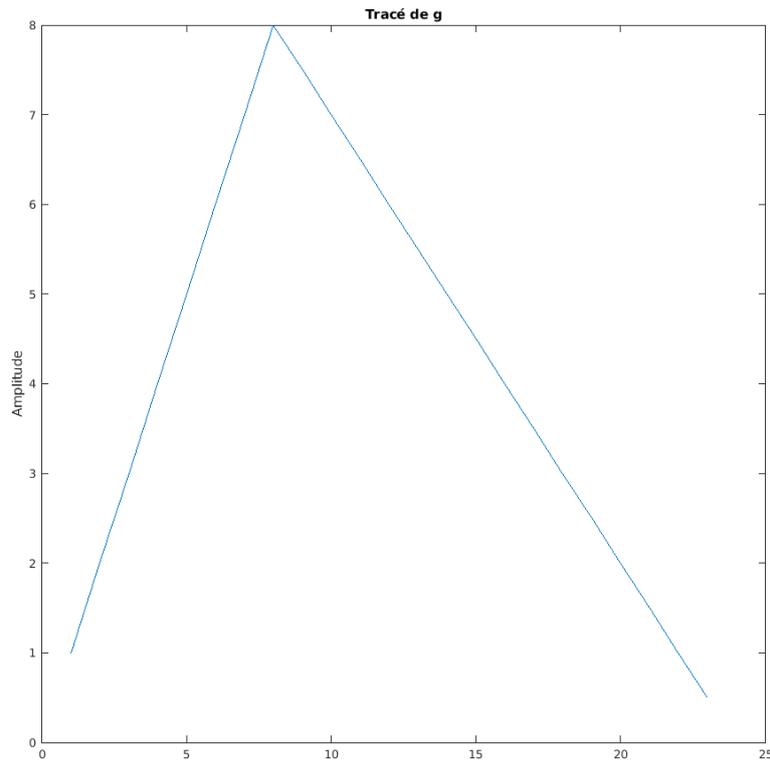


FIGURE 2 –  $g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$

On peut donc déduire le signal en sortie du filtre de réception qui s'écrit d'après le cours :

$$y_e(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$$

Ce qui donne sur MATLAB :

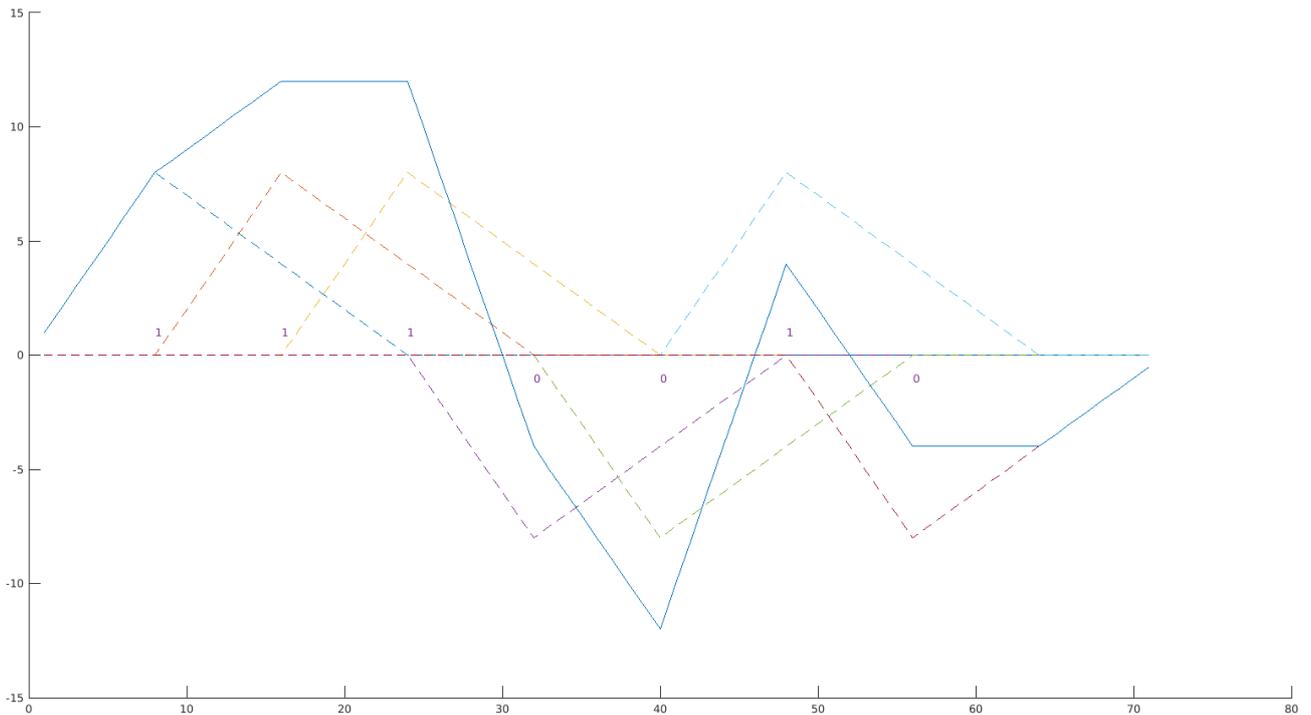


FIGURE 3 – Signal en sortie du filtre de réception pour la séquence 1110010

**2.1.4 Tracer le diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception  $h_r(t)$ .  
Est-il possible de respecter le critère de Nyquist sur cette chaîne de transmission ?**

Voici le tracé que nous déduisons de celui qui précède :

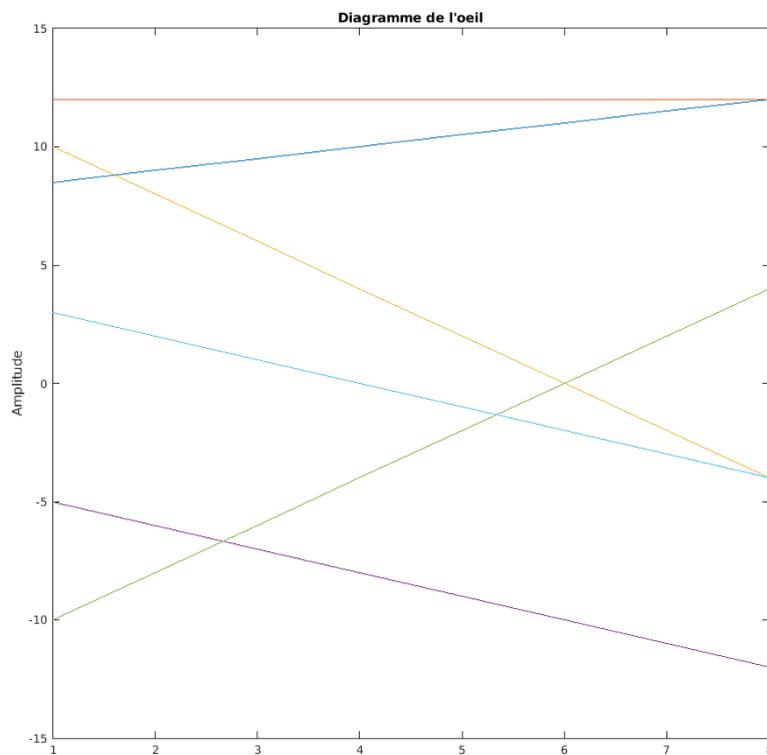


FIGURE 4 – Diagramme de l'oeil théorique

On déduit de ce diagramme de l'oeil qu'il est impossible de respecter le critère de Nyquist puisqu'il n'existe pas de moment pour lequel on retrouve le codage des deux symboles de départ.

**2.1.5 En échantillonnant à  $t_0 + mT_s$  avec  $t_0 = T_s$  et un détecteur à seuil à 0, calculer le TEB de la liaison en fonction de  $T_s$  et  $\sigma_w$ .**

Ici un symbole code un bit ( $M = 2$ ) on a donc  $TEB = TES$ .

Or, on sait que l'expression du TES est donnée par :

$$TES = P[a_k = -1]P[\hat{a}_k = +1 | a_k = -1] + P[a_k = +1]P[\hat{a}_k = -1 | a_k = +1]$$

On peut exprimer chacune des probabilités conditionnelles comme il suit :

$$\begin{aligned} P[\hat{a}_k = +1 | a_k = -1] &= P[\{(\hat{a}_k = +1 | a_k = -1) \wedge (a_{k-1} = -1)\} \vee \{(\hat{a}_k = +1 | a_k = -1) \wedge (a_{k-1} = +1)\}] \\ &= P[a_{k-1} = -1]P[(\hat{a}_k = +1 | a_k = -1) | a_{k-1} = -1] \\ &\quad + P[a_{k-1} = +1]P[(\hat{a}_k = +1 | a_k = -1) | a_{k-1} = +1] \end{aligned}$$

Posons  $\omega_m$  l'échantillon de bruit gaussien prélevé à l'instant  $t_0 + mT_s$ , et rappelons que nous avons fixé le seuil de décision à 0. D'après le cours, le signal en sortie de l'échantillonneur est  $z(t) = a_k \cdot c_k \cdot g(t_0) + \omega_m$  avec les  $c_k$  qui sont les amplitudes prises par le signal échantillonné. D'après le diagramme de l'oeil les 4 amplitudes possibles sont :

$$\{-T_s(\alpha_0 + \alpha_1), -T_s(\alpha_0 - \alpha_1), T_s(\alpha_0 - \alpha_1), T_s(\alpha_0 + \alpha_1)\} = \left\{ \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P[\hat{a}_k = +1 | a_k = -1] &= P[a_{k-1} = -1]P\left[\frac{-3T_s}{2} + \omega_m > 0\right] + P[a_{k-1} = +1]P\left[\frac{-T_s}{2} + \omega_m > 0\right] \\ &= \frac{1}{2}Q\left(\frac{3T_s}{2\sigma_w}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right) \end{aligned}$$

En procédant de manière analogue on trouve :

$$P[\hat{a}_k = -1 | a_k = +1] = \frac{1}{2}Q\left(\frac{3T_s}{2\sigma_w}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} TEB = TES &= \frac{1}{2}P[\hat{a}_k = +1 | a_k = -1] + \frac{1}{2}P[\hat{a}_k = -1 | a_k = +1] \\ &= 2\left(\frac{1}{2}Q\left(\frac{3T_s}{2\sigma_w}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)\right) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{3T_s}{2\sigma_w}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right) \end{aligned}$$

**2.1.6 Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception  $\sigma_w^2$  en fonction de  $N_0$  et de  $T_s$ .**

$$\sigma_w^2 = P_\omega = \int_{\mathbb{R}} S_r(f) df \quad (\text{Définition})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 S_w(f) df = \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 N_0 df \quad (\text{Wiener-Lee})$$

$$= N_0 \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt = N_0 \int_0^{T_s} 1 dt = N_0 T_s \quad (\text{Parseval})$$

**2.1.7** Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur ( $E_s$ ) en fonction de  $T_s$ .

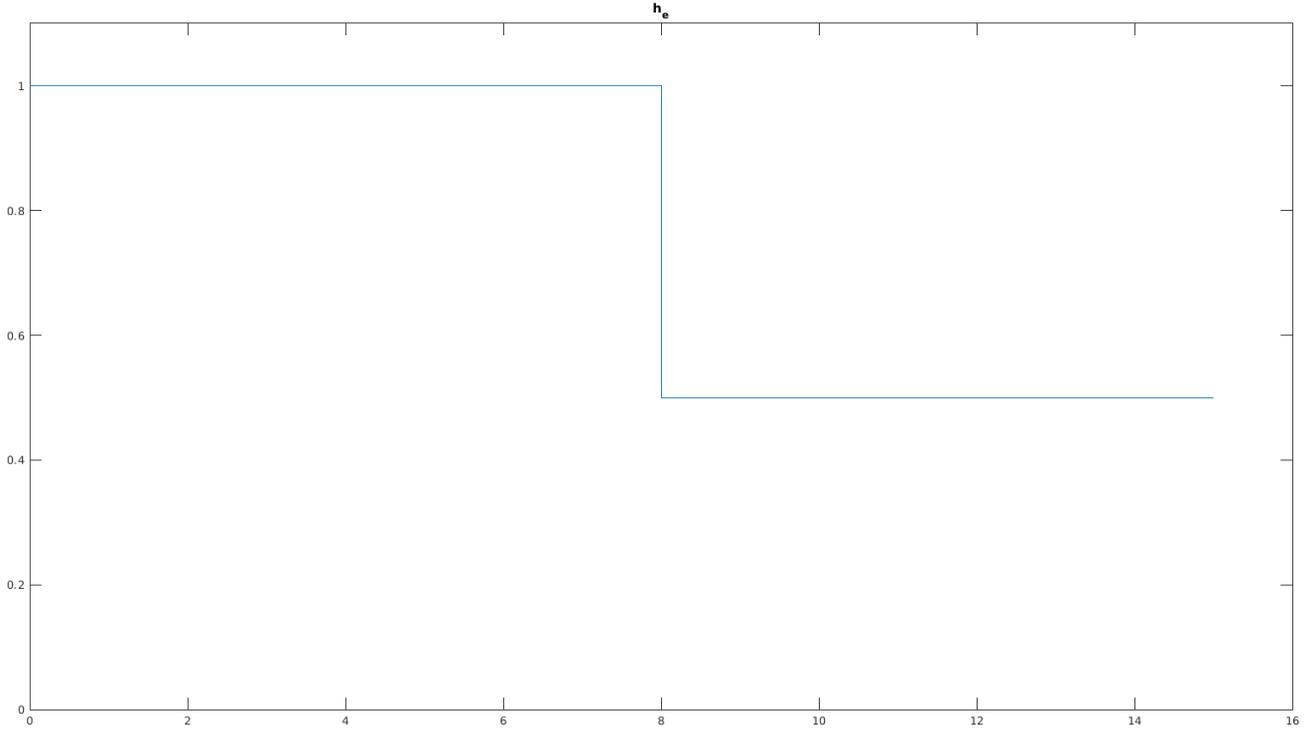


FIGURE 5 –  $h_e(t)$

On sait que  $h_e(t) = h(t) * h_c(t) = \alpha_0 \Pi_{T_s}(t) + \alpha_1 \Pi_{T_s}(t - T_s)$

On a alors  $\int_{\mathbb{R}} |h_e(t)|^2 dt = \frac{5}{4} T_s$  (1)

D'après le cours,

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re [R_a(k) e^{2j\pi f k T_s}] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$
 (2)

On en déduit alors,

$$E_b = E_s = T_s P_c = T_s \int_{\mathbb{R}} S_c(f) df$$
 (Définition)

$$= T_s \int_{\mathbb{R}} \frac{|H_e(f)|^2}{T_s} df = \int_{\mathbb{R}} |H_e(f)|^2 df$$
 (2)

$$= \int_{\mathbb{R}} |h_e(t)|^2 dt = \int_0^{2T_s} |h_e(t)|^2 dt$$
 (Parseval)

$$= \frac{5}{4} T_s$$
 (1)

**2.1.8** Dédire des questions précédentes l'expression du TEB en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$ .

On a  $\sigma_w = \sqrt{N_0 T_s}$  et  $T_s = \frac{4}{5} E_b$

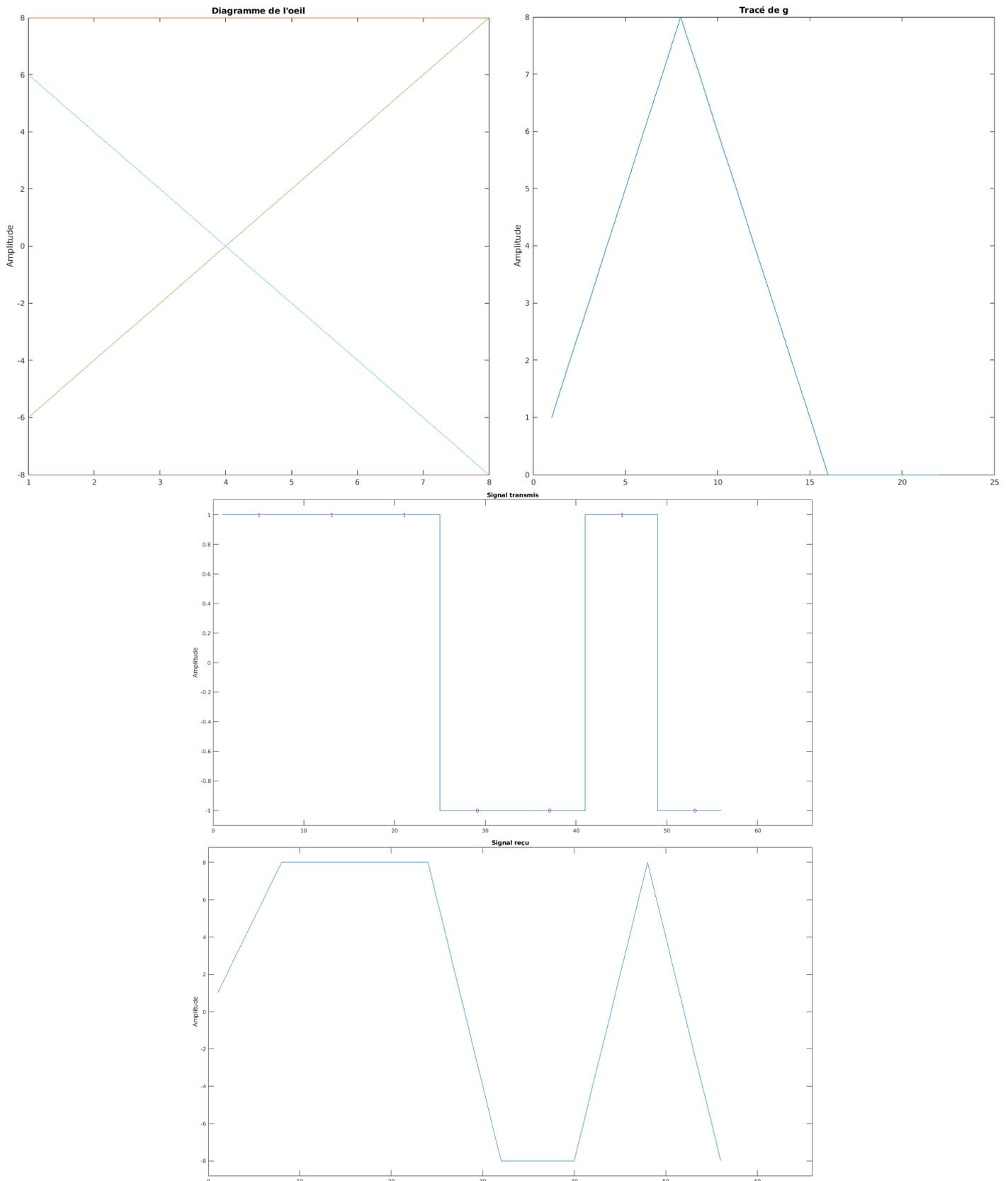
Donc,

$$TEB = \frac{1}{2} Q \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}} \right) + \frac{1}{2} Q \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}} \right)$$

## 2.2 Implantation sous Matlab

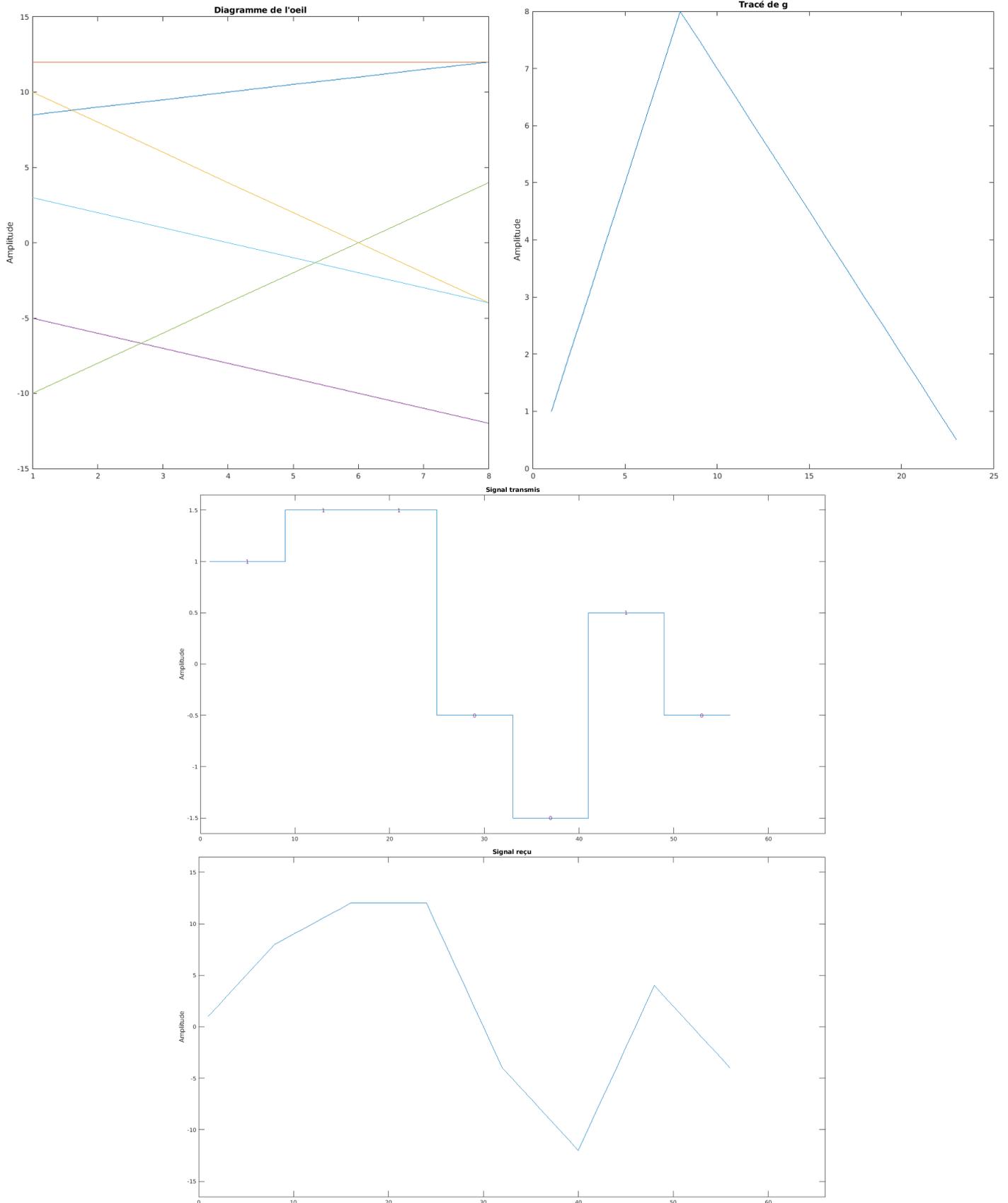
### 2.2.1 Implantez la chaine de transmission sans canal et vérifiez que le TEB de la liaison est bien nul.

Voici pour la chaine de transmission sans canal (ce qui est équivalent à un canal donc la fonction de transfert est un dirac), la fonction de transfert  $g$ , son diagramme de l'oeil ainsi que le tracé du signal en entrée et en sortie du receptr pour bits = 1110010 :



**2.2.2** Implantez la chaine de transmission avec la partie filtrage réalisée par le canal de propagation et vérifiez que vous retrouvez bien les résultats obtenus dans votre étude théorique.

Voici pour la chaine de transmission avec canal selectif ( $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = \tau_0 + T_s$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.5$ ), la fonction de transfert  $g$ , son diagramme de l'oeil ainsi que le tracé du signal en entrée et en sortie du recepneur pour bits = 1110010 :



### 2.2.3 Visualisez la constellation obtenue en réception. Est-elle conforme à ce que vous attendiez ?

Ayant accès aux signaux en sortie du récepteur, on peut tracer la constellation de la chaîne sans canal et celle de la chaîne avec canal sélectif :

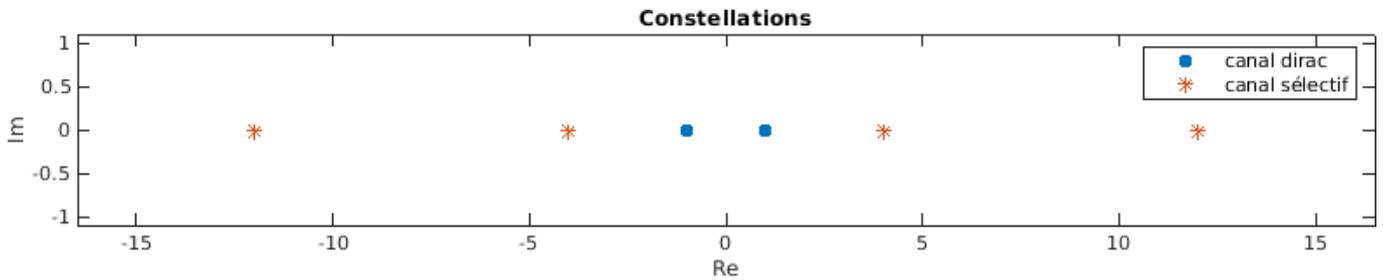


FIGURE 6 – Constellations

On observe alors que la constellation associée au canal sélectif possède quatre symboles au lieu de deux. Cela est dû au retard qui fait que chaque bit est désormais associé à deux symboles. De même on observe que les amplitudes des symboles du canal sélectif sont plus grandes.

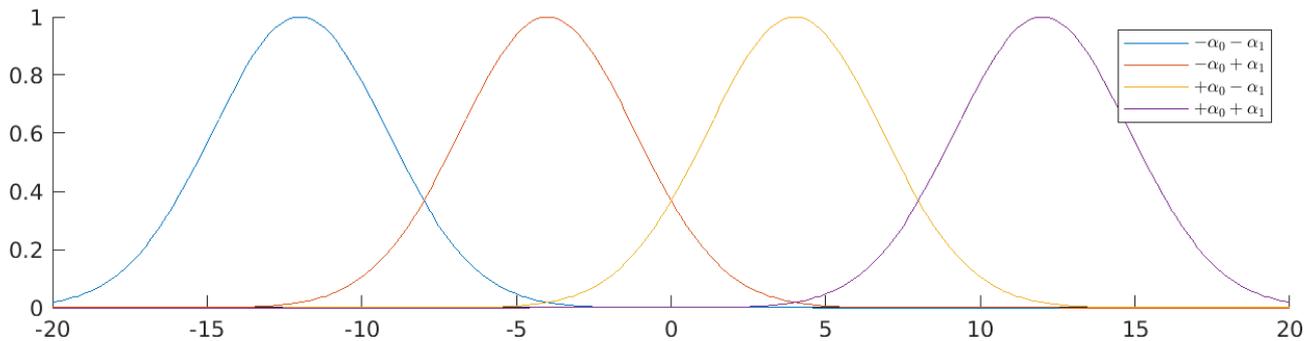


FIGURE 7 – Répartition des symboles

Lorsque l'on ajoutera du bruit plus tard, on peut donc s'attendre à observer des courbes de gaussienne comme ceci.

### 2.2.4 Mesurez le TEB et expliquez la valeur obtenue.

$$\text{TEB} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\text{bit}_k - \hat{\text{bit}}_k)^2$$

Bien que la chaîne avec canal sélectif ne respecte pas le critère de Nyquist, on observe tout de même que le TEB est nul. Cela est dû grâce à notre choix de seuil en 0, en effet, bien qu'il y ait désormais deux symboles qui codent le même bit, cela ne change rien du point de vue de la décision.

2.2.5 Implantez la chaîne de transmission complète avec le filtrage canal et l'ajout de bruit. Tracez le TEB obtenu en fonction du rapport SNR à l'entrée du récepteur.

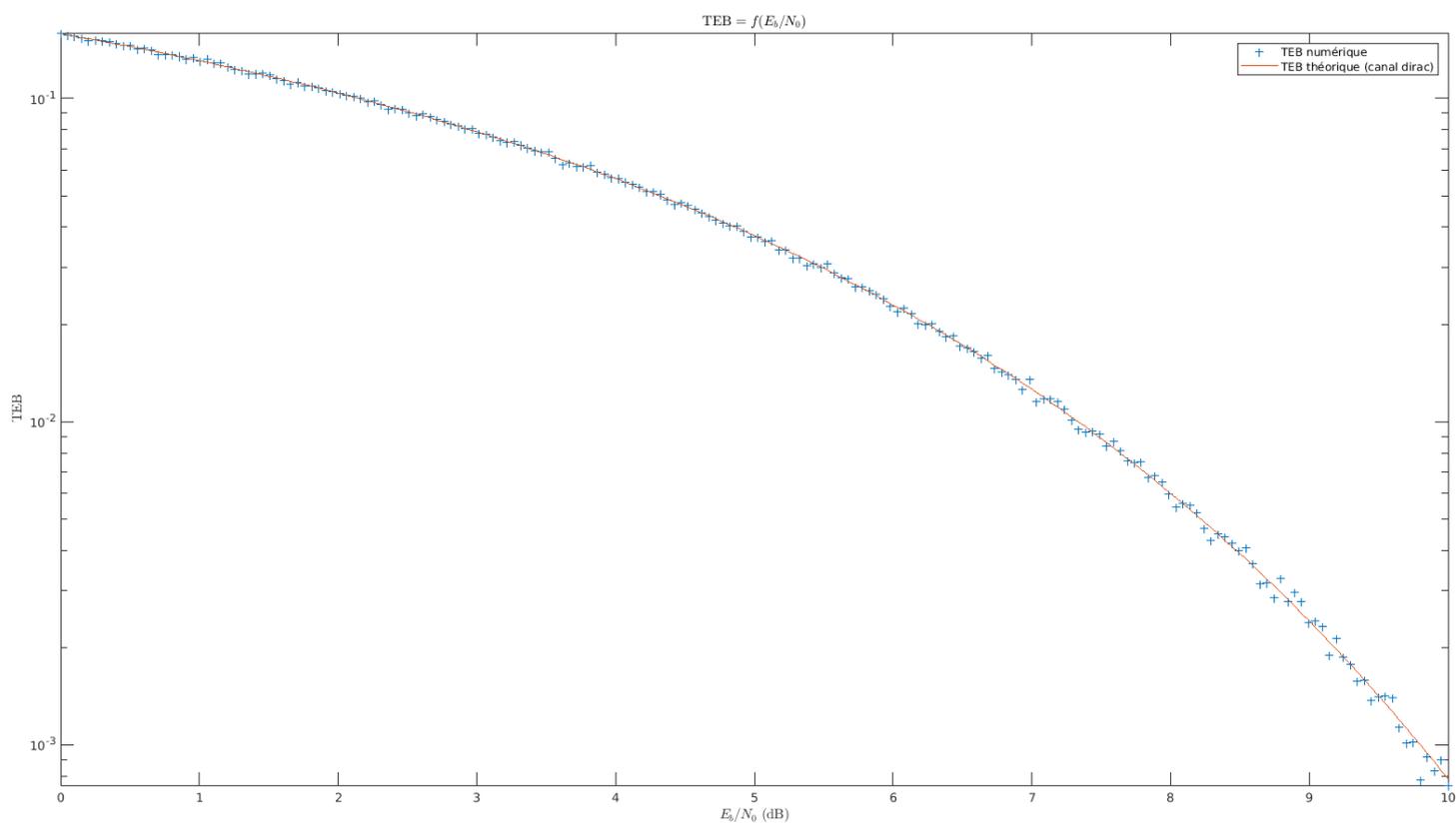


FIGURE 8 – TEB de la chaîne sans canal (dirac)

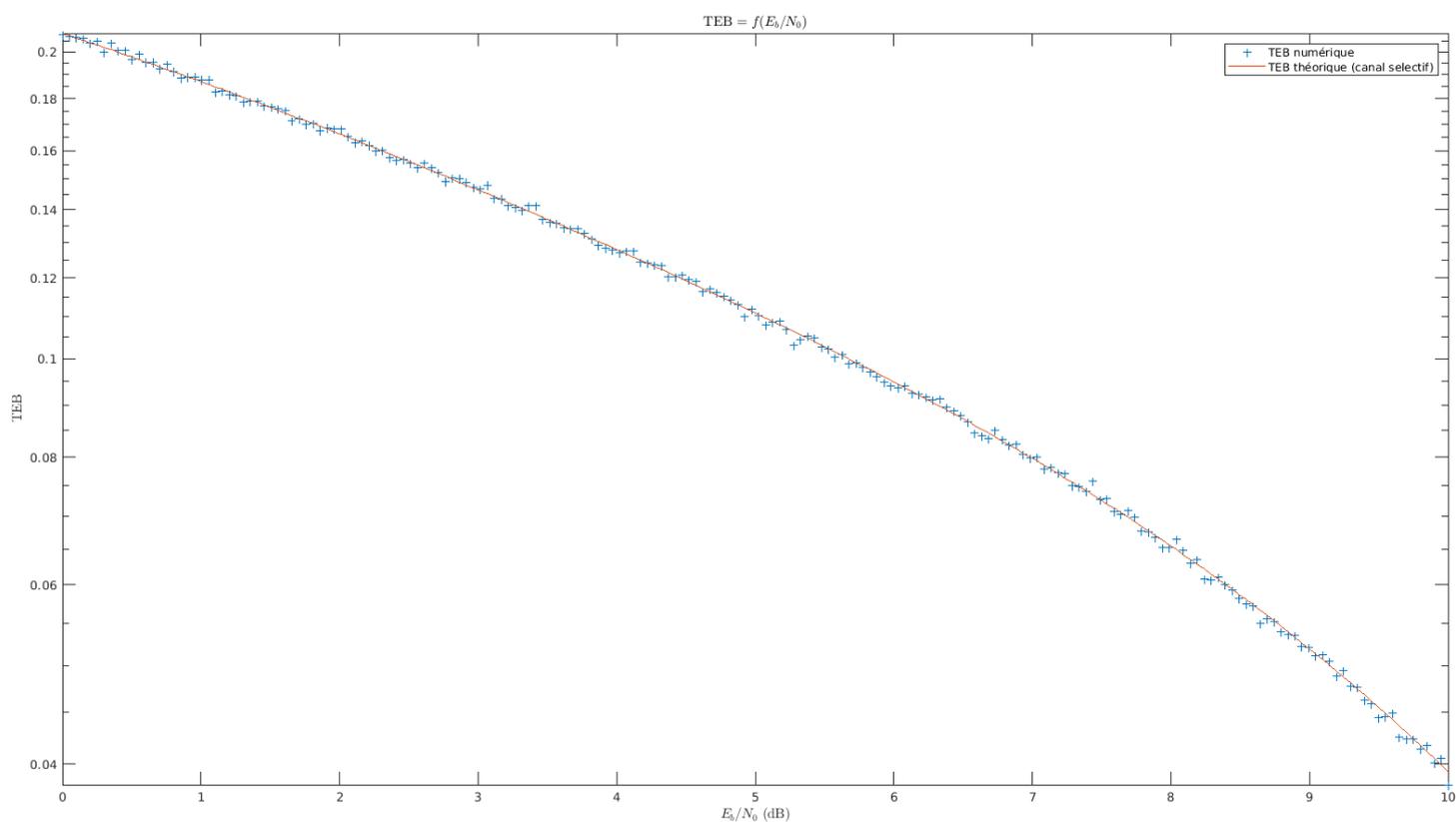


FIGURE 9 – TEB de la chaîne avec canal selectif

### 3 Egalisation ZFE

#### 3.1 Etude théorique

##### 3.1.1 Déterminer les coefficients de l'égaliseur à implanter pour égaliser le canal multi-trajet considéré précédemment.

Pour le calcul des coefficients théoriques nous choisis le cas où  $K = N$  ainsi que  $N = 3$  et ceci uniquement afin de valider les 3 premiers coefficients obtenus par simulation (le raisonnement étant itérable autant de fois que l'on souhaite). Pour calculer ces coefficients nous sommes partis du système fourni dans le sujet :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t_0) & 0 & 0 \\ z(t_0 + T_s) & z(t_0) & 0 \\ z(t_0 + 2T_s) & z(t_0 + T_s) & z(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ensuite il nous a suffi de lire la valeur que prend  $z$  tous les  $T_s$  comme vous pourrez le constater vous même sur la figure ci-dessous :

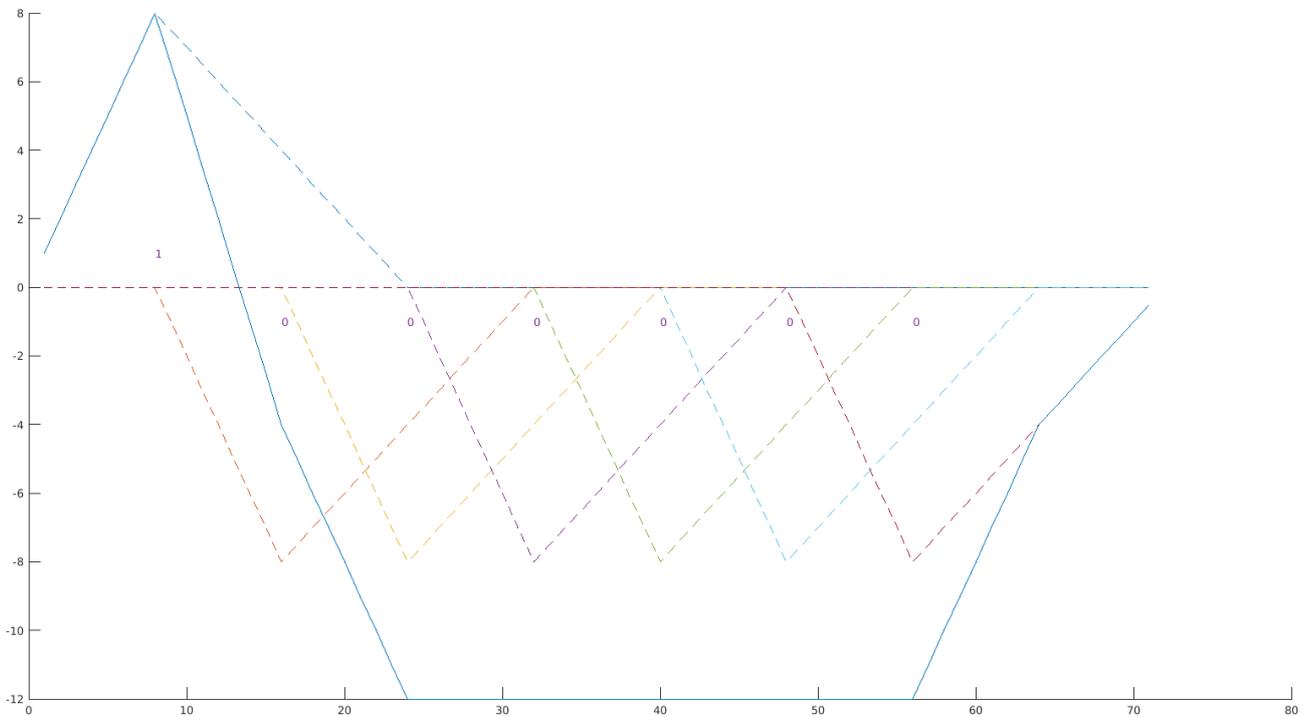


FIGURE 10 – Signal en sortie du filtre de réception obtenu par l'injection d'un dirac dans le chaine

Ainsi il est aisé de noter que  $z(t_0) = T_s$ ,  $z(t_0 + T_s) = -0.5T_s$  et  $z(t_0 + 2T_s) = -1.5T_s$

Le système associé est alors le suivant :

$$\begin{cases} T_s c_1 + 0 + 0 = 1 \\ -0.5T_s c_1 + T_s c_2 + 0 = 0 \\ -1.5T_s c_1 - 0.5T_s c_2 + T_s c_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit ainsi que :

$$\begin{cases} c_0 = 1/T_s \\ c_1 = 0.5/T_s \\ c_2 = 1.75/T_s \end{cases}$$

## 3.2 Implantation sous Matlab

### 3.2.1 Déterminer par simulation les coefficients de l'égaliseur et les comparer à ceux trouvés précédemment.

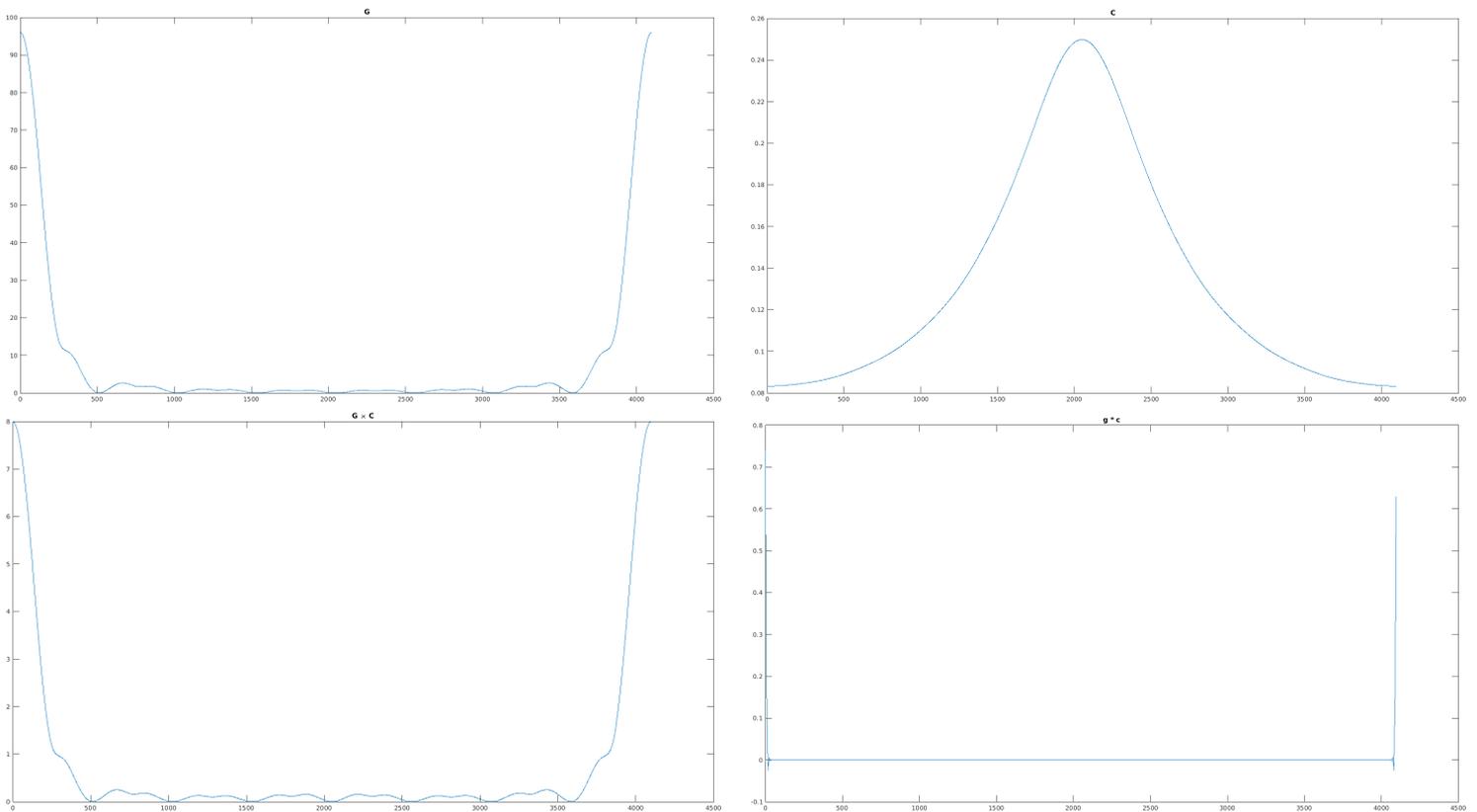
En fournissant en entrée de notre chaîne de transmission un dirac, on peut former notre matrice  $Z$  en utilisant les coefficients du signal à l'entrée du filtre de réception, nous permettant de résoudre le système décrit par l'équation suivante :

$$x_r(t_0 + mT_s) = \sum_{k=0}^N c_k z(t_0 + (m - k)T_s)$$

Ainsi pour un ordre  $N = 10$ , on obtient :

$$C^T = (0.1250 \quad -0.0625 \quad 0.0312 \quad -0.0156 \quad 0.0078 \quad -0.003 \quad 0.0020 \quad -0.0010 \quad 0.0005 \quad -0.0002)$$

### 3.2.2 Tracer la réponse en fréquence du canal de propagation, la réponse en fréquence de l'égaliseur, le produit des deux. Que peut-on conclure ?



En traçant les réponses en fréquence de  $G$  et  $C$  ainsi que le produit  $G \times C$ , on observe que les fréquences autour de zéro sont atténuées et que, au contraire, celles d'amplitudes relativement faible sont amplifiées.

On remarque alors que  $G \times C$  ressemble nettement plus à un sinus cardinal que  $G$  tout seul (sans égalisation). De ce fait, le critère de Nyquist est respecté, on confirme cela en traçant la transformée de Fourier inverse de  $G \times C$  et en remarquant que l'on obtient une distribution en forme de porte (permettant elle aussi de valider le critère de Nyquist).

**3.2.3 Tracer la réponse impulsionnelle de la chaîne de transmission échantillonnée à  $N_s$  avec et sans égalisation. Que peut-on conclure ? Tracer de même les constellations obtenues avant et après égalisation.**

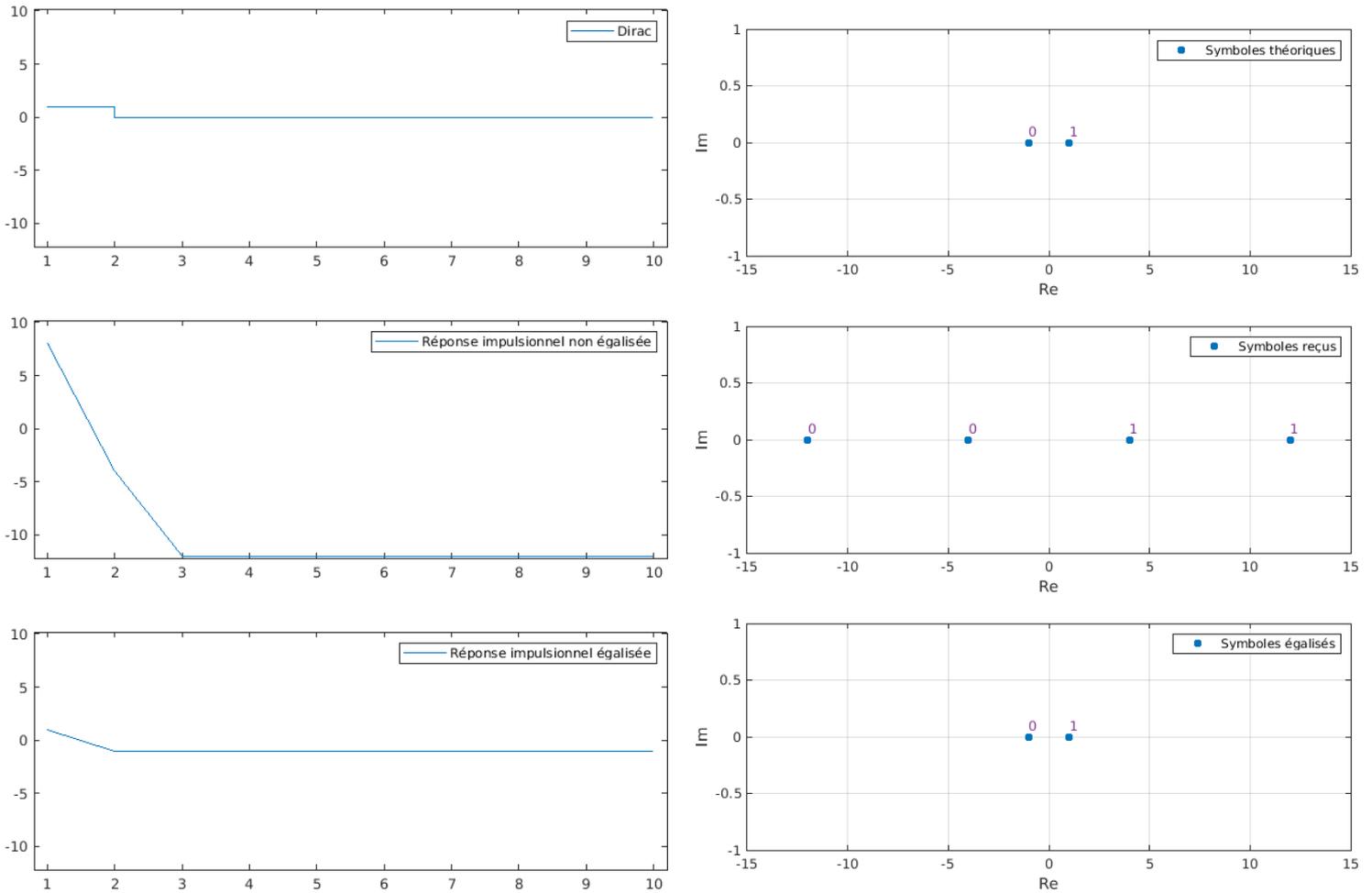


FIGURE 11 – Réponses impulsionnelles et constellations de la chaîne

On remarque sur la figure 11 que la réponse impulsionnelle de la chaîne après égalisation est bien ramenée à -1 (au lieu de -4 ou -12). On en déduit que cela va nous permettre de respecter le critère de Nyquist (puisque la constellation après égalisation se rapproche de celle attendue).

### 3.2.4 Ajouter du bruit dans la chaîne de transmission, tracer le TEB obtenu avec égalisation

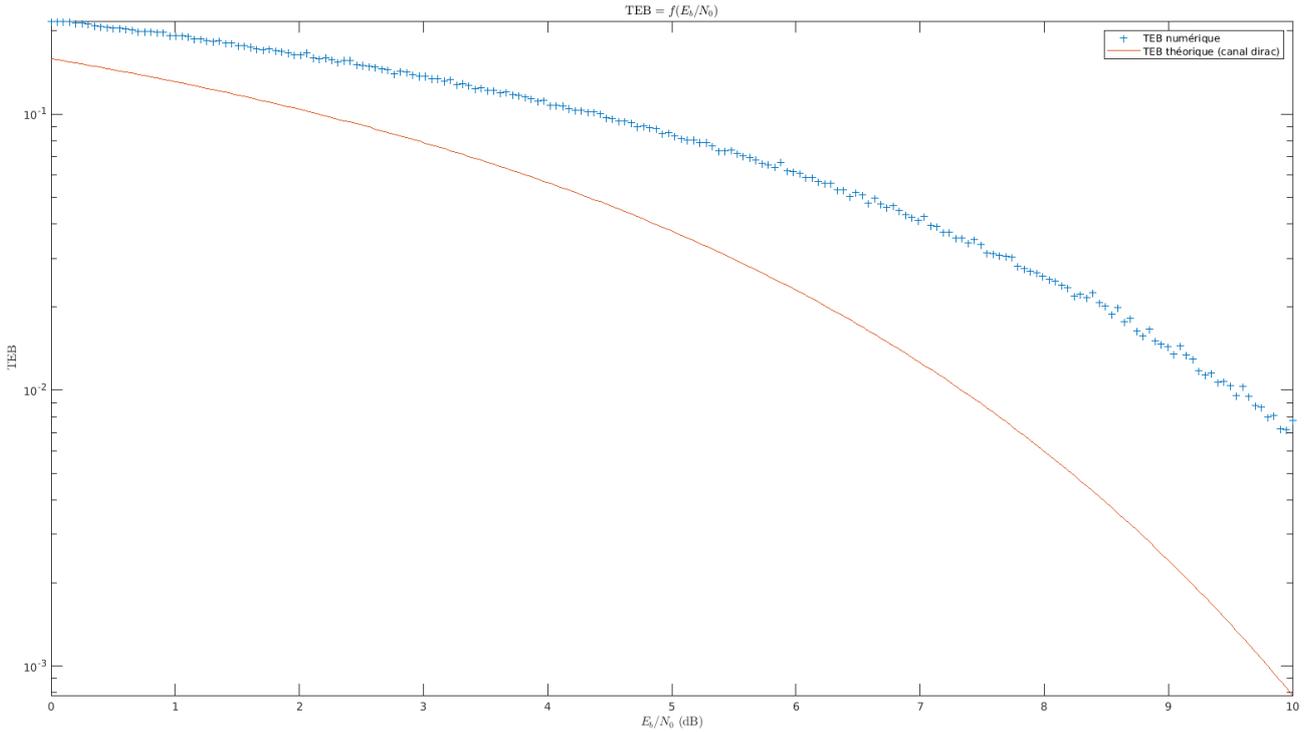


FIGURE 12 – TEB de la chaîne égalisée

On observe alors que le TEB de la chaîne égalisée se rapproche fortement de celui trouvé dans le cas où il n'y a pas de canal (cf figure 8). On remarque tout de même que cette égalisation n'est pas parfaite. En effet, nous avons résolu un système discret, ainsi si l'on augmente l'ordre de notre résolution, on obtient des TEB numériques encore plus proches des TEB théoriques.

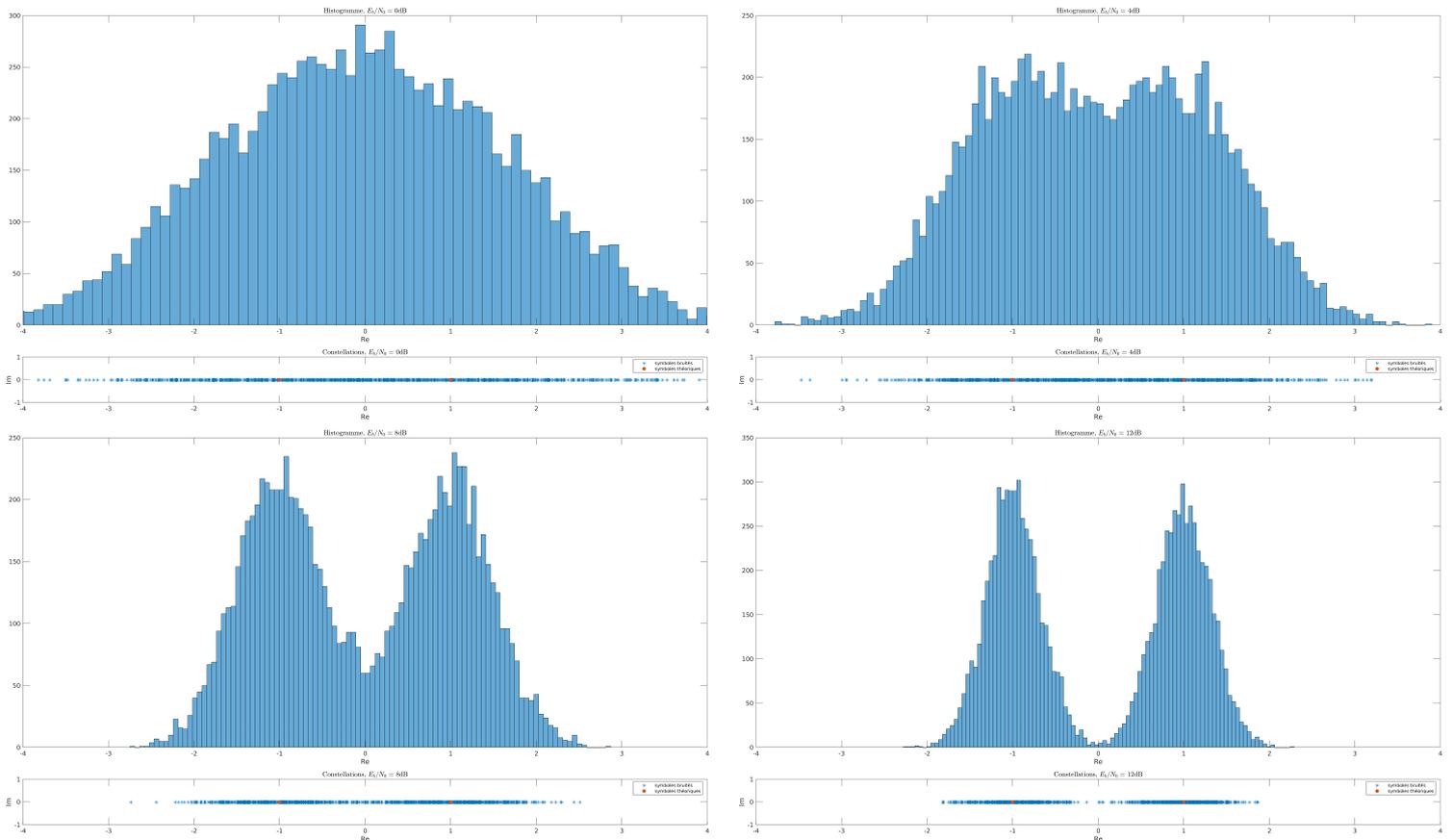


FIGURE 13 – Constellations de la chaîne égalisée, pour différents SNR

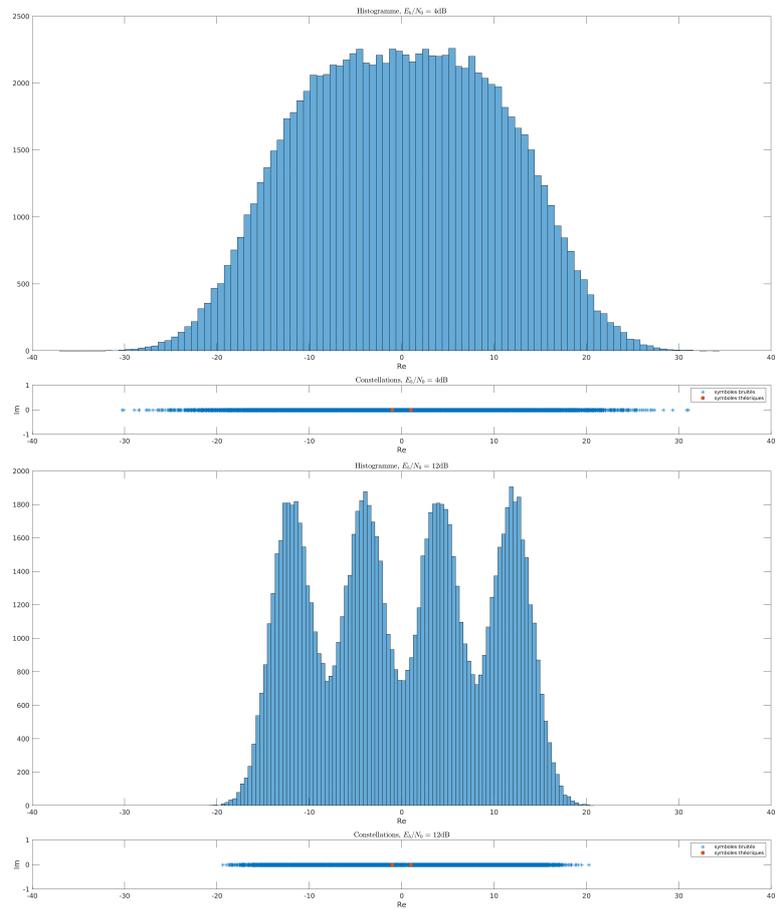
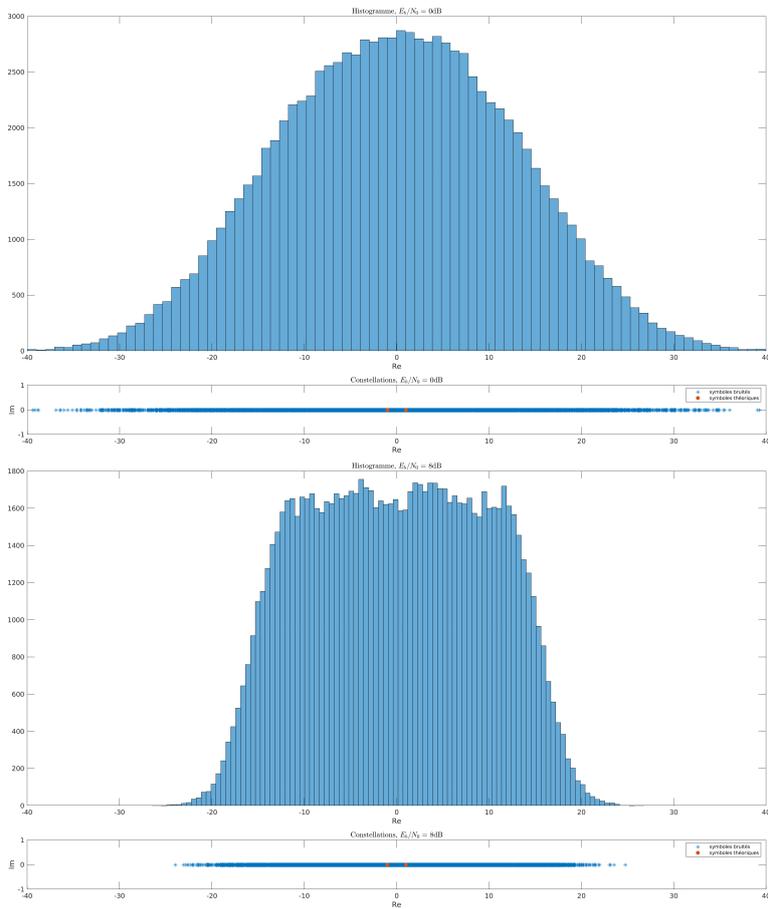


FIGURE 14 – Constellations de la chaîne avec canal, pour différents SNR

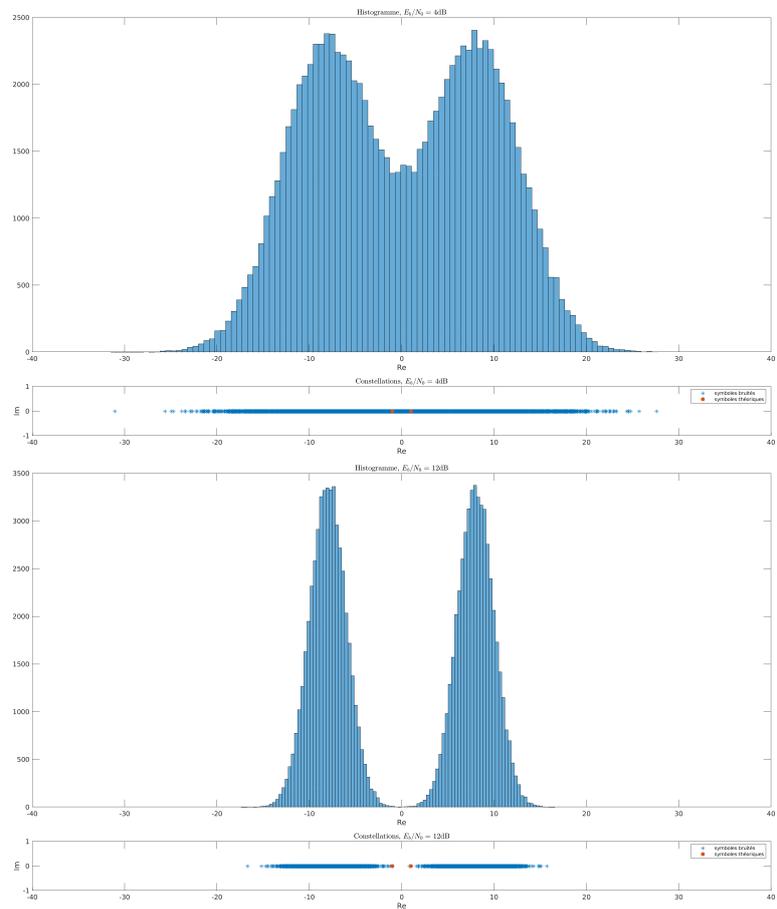
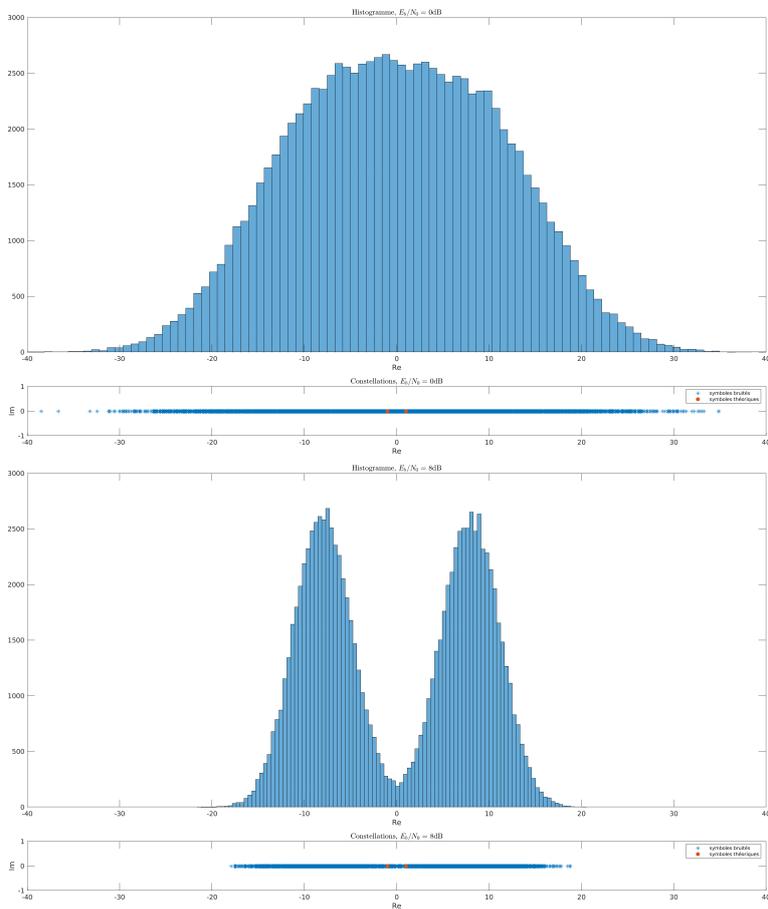


FIGURE 15 – Constellations de la chaîne sans canal, pour différents SNR